追加練習問題

第１講　複素数平面の基礎

複素数 α，β は $4\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=0$，$|\alpha|=2$ を満たすとする．

(1)　$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求めよ．

(2)　複素数平面上で 0，α，β を３つの頂点とする三角形の面積を求めよ．

第２講　複素数で点を移動

複素数平面において，原点 O(0)，A(α)，B(β) として，3 点 O，A，B は鋭角三角形になっている．点 P(z) を A を中心としてある一定の角 θ ($0<\theta<2\pi$) だけ回転した点を Q(z') とするとき，BQ の長さが 1 となった．このような P の軌跡は円となるが，その半径を求めよ．

第３講　複素数の方程式と図形

複素数平面上の点 z が

$$z\overline{z}-(1+i)z-(1-i)\overline{z}=0$$

を満たしている．

このとき z の軌跡は円になるが，その半径を求めよ．

第４講　ド・モアブルの定理

α を 0 でない複素数として，z の方程式 $z^3=\alpha$ を考える．この方程式の異なる 3 つの解を z_1，z_2，z_3 $(0\leqq \arg z_1<\arg z_2<\arg z_3<2\pi)$ とするとき，$\arg\dfrac{z_2}{z_1}$ の値を求めよ．

第５講　２次曲線

正の定数 a と b に対し，楕円 C_2：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の３点を A，B，P とする．

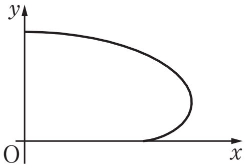
点 A は第１象限の定点で点 B は第２象限の定点であり，点 P は C 上の動点とする．

$\mathrm{A}(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{B}(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ とするとき，三角形 ABP の面積を最大にする P を求めよ．

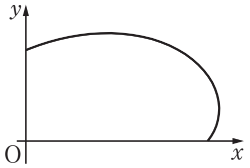
第６講　媒介変数で表示された曲線

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $(x,\ y) = (3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta + \sin 3\theta)$ で表される曲線を次から選べ.

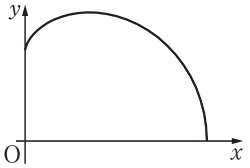
(A)



(B)



(C)



第７講　極限の基本

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{[\sqrt{3}\,x]}{[x]}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

第８講　漸化式と極限

$\alpha=1-\sqrt{3}$，$\beta=1+\sqrt{3}$ に対して $a_n=\alpha^n+\beta^n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定め，β^n 以下の最大整数を k_n で表すことにする．
このとき，k_{2n-1} を 2 で割ったときの余りを求めよ．

第9講　ちょっと困った極限

長さが π の線分 AB 上(両端を含む)にいくつかの点を，となりあう点の距離は $\dfrac{1}{n}$ 以上であるようにできるだけ多くの点を並べたい．

このときの並べる点の個数の最大値を a_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ の値を求めよ．

第 10 講　無限級数

$0<x<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)x^k}{n}$ を求めよ．

第11講　微分の基本

(5)は $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ を，それ以外は $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1)　$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(2)　$y=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$

(3)　$x=\tan y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(4)　$(x,\ y)=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ $(t>0)$

(5)　$y=xe^x$

(6)　$x^2+xy+y^2=1$

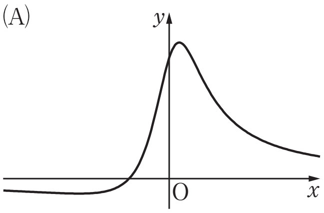
第 12 講　接線など

p を正の定数として，$C：y^2=4px$ 上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \beta)$ における接線を求めよ．

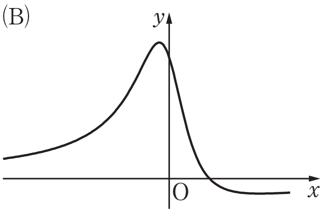
第 13 講　グラフの描き方（その１）

$f(x)=\dfrac{8+6x}{1+x^2}$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフは以下のどれになるか選べ.

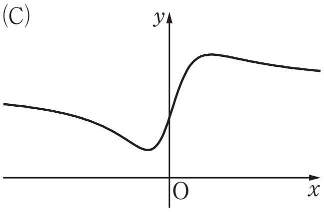
(A)



(B)



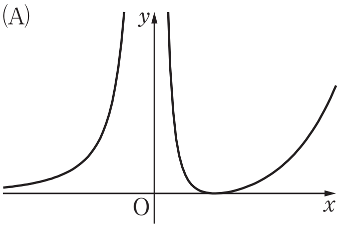
(C)



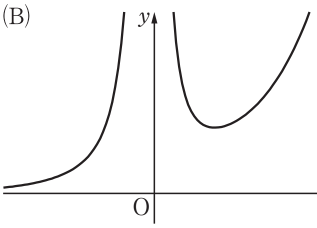
第14講　グラフの描き方（その2）

$f(x)=\dfrac{(x^2+1)e^x}{x^2}$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフは以下のどれになるか選べ.

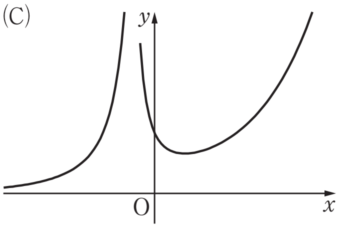
(A)



(B)



(C)



第 15 講　最大・最小

$f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+2}$ の最小値を求めよ．

第 16 講　実数解に関する問題

x の方程式

$$(\log p)x - \log x = 0 \quad (x > 0)$$

の異なる実数解が 2 つであるような正の定数 p の範囲を求めよ．

ただし，$\lim_{x \to +0} x^{\frac{1}{x}} = 0$，$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ であることは証明なしに用いてもよい．

第 17 講　不等式について

k を実数とする．１より大きい x に対して $x^4-2x^2-kx^2+k+2 \geqq 0$ が常に成立するような k の最大値を求めよ．

第 18 講　積分の基礎

次の不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int (e^x+e^{-x})^3\,dx$

(2) $\displaystyle\int \sin 3x\cos 2x\,dx$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{3-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{2x^3+10x^2+10x-5}{(x+2)(x+3)}\,dx$

第 19 講　部分積分

不定積分を求めよ．ただし積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int e^x \cos 2x\, dx$

(2) $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$

(4) $\displaystyle\int x^2 \cos x\, dx$

第20講　置換積分

定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}(\log x)^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{3+x^2}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

第21講　面積

$y=a\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=\tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

ただし，a は1より大きい定数とする.

第22講　体積

xyz 空間の zx 平面上に $C: z=\sin x$ かつ $0 \leqq x \leqq \pi$ かつ $y=0$ を考える．
C 上の点 P を通り $\vec{l}=(1,\ -2,\ -1)$ に平行な直線と xy 平面との交点を Q とする．
P が C 上を動くとき，線分 PQ と zx 平面，xy 平面で囲まれる部分を K とする．立体 K の体積 V を求めよ．

第23講　積分でやっておくこと（その1）

座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ $(t \geqq 0)$ について，Pの速度ベクトルを $\vec{v}$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}$ の値を求めよ．

(2)　$0 \leqq t \leqq 1$ の間にPが動いた道のりを求めよ．

第24講　積分でやっておくこと（その２）

次の各問いに答えよ．

⑴　$x>0$ のとき，次の不等式を示せ．

$$x-\frac{1}{2}x^2<\log(1+x)<x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$$

⑵　$I=\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx$ とするとき，次のどの不等式が成り立つか．成り立つものを選べ．

(A)　$0.7<I<0.8$　　(B)　$0.8<I<0.9$　　(C)　$0.9<I<1.0$

追加練習問題解答

第１講　複素数平面の基礎

複素数 α, β は $4\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=0$, $|\alpha|=2$ を満たすとする.

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求めよ.

(2) 複素数平面上で 0, α, β を 3 つの頂点とする三角形の面積を求めよ.

【答】 (1) $-1\pm\sqrt{3}\,i$　　(2) $2\sqrt{3}$

【解説】 (1) $|\alpha|=2$ より $\alpha\neq 0$ なので, $4\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=0$ の両辺を α^2 で割ると

$4+2\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2=0$ となるので

$$\frac{\beta}{\alpha}=-1\pm\sqrt{3}\,i$$

(2) $\dfrac{\beta-0}{\alpha-0}=-1\pm\sqrt{3}\,i=2\left\{\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}$ (複号同順) なので, O(0), A(α),

B(β) とすると $\mathrm{OA}=|\alpha|=2$, $\mathrm{OB}=2\mathrm{OA}=4$, $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2}{3}\pi$ であるから, 求める面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\sin\angle\mathrm{AOB} &= \frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

第2講　複素数で点を移動

複素数平面において，原点 O(0)，A(α)，B(β) として，3 点 O，A，B は鋭角三角形になっている．点 P(z) を A を中心としてある一定の角 θ $(0<\theta<2\pi)$ だけ回転した点を Q(z') とするとき，BQ の長さが 1 となった．このような P の軌跡は円となるが，その半径を求めよ．

【答】 1

【解説】 $\cos\theta+i\sin\theta=\omega$ とする．A を中心として P を角 θ だけ回転したものが Q なので

$$z'-\alpha=\omega(z-\alpha) \qquad \therefore \quad z'=(1-\omega)\alpha+\omega z$$

このとき BQ＝1 なので

$$|z'-\beta|=1 \iff |(1-\omega)\alpha+\omega z-\beta|=1$$

$$\iff |\omega||z-\{\overline{\omega}\beta+(1-\overline{\omega})\alpha\}|=1$$

ここで $|\omega|=1$ より z の軌跡は $|z-\{\overline{\omega}\beta+(1-\overline{\omega})\alpha\}|=1$，つまり中心 $\overline{\omega}\beta+(1-\overline{\omega})\alpha$，半径 1 の円となる．

よって求める半径は 1.

第3講　複素数の方程式と図形

複素数平面上の点 z が

$$z\overline{z}-(1+i)z-(1-i)\overline{z}=0$$

を満たしている．

このとき z の軌跡は円になるが，その半径を求めよ．

【答】 $\sqrt{2}$

【解説】

$$\begin{aligned} z\overline{z}-(1+i)z-(1-i)\overline{z}=0 &\iff \{z-(1-i)\}\{\overline{z}-(1+i)\}-(1-i)(1+i)=0 \\ &\iff |z-(1-i)|^2=2 \\ &\iff |z-(1-i)|=\sqrt{2} \end{aligned}$$

より z の軌跡は，中心 $1-i$，半径 $\sqrt{2}$ の円．

よって求める半径は $\sqrt{2}$．

第４講　ド・モアブルの定理

α を 0 でない複素数として，z の方程式 $z^3=\alpha$ を考える．この方程式の異なる 3 つの解を z_1，z_2，z_3（$0\leqq \arg z_1<\arg z_2<\arg z_3<2\pi$）とするとき，$\arg\dfrac{z_2}{z_1}$ の値を求めよ．

【答】 $\dfrac{2}{3}\pi$

【解説】 $\alpha=r_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$（$r_0>0$，$0\leqq\theta_0<2\pi$）とおける．

ここで $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$（$r>0$，$0\leqq\theta<2\pi$）とすると，$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$ より

$$z^3=\alpha \iff r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=r_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$$

であるから，$0\leqq 3\theta<6\pi$ であることに注意すると

$$r^3=r_0 \text{ かつ } 3\theta=\theta_0,\ \theta_0+2\pi,\ \theta_0+4\pi$$

$$\iff r=\sqrt[3]{r_0} \text{ かつ } \theta=\frac{\theta_0}{3},\ \frac{\theta_0+2\pi}{3},\ \frac{\theta_0+4\pi}{3}$$

となる．

よって $\arg z_1=\dfrac{\theta_0}{3}$，$\arg z_2=\dfrac{\theta_0+2\pi}{3}$ より

$$\arg\frac{z_2}{z_1}=\arg z_2-\arg z_1=\frac{2}{3}\pi$$

第５講　２次曲線

正の定数 a と b に対し，楕円 C_2：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の３点を A，B，P とする．
点 A は第１象限の定点で点 B は第２象限の定点であり，点 P は C 上の動点とする．
$\mathrm{A}(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{B}(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ とするとき，三角形 ABP の面積を最大にする P を求めよ．

【答】 $\left(-a\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2},\ -b\sin\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)$

【解説】 $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a(\cos\theta-\cos\alpha),\ b(\sin\theta-\sin\alpha))$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a(\cos\beta-\cos\alpha),\ b(\sin\beta-\sin\alpha))$
なので，三角形 ABP の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}|a(\cos\theta-\cos\alpha)\times b(\sin\beta-\sin\alpha)-b(\sin\theta-\sin\alpha)\times a(\cos\beta-\cos\alpha)| \\
&= \frac{ab}{2}|(\sin\beta-\sin\alpha)\cos\theta-(\cos\beta-\cos\alpha)\sin\theta+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)| \\
&= \frac{ab}{2}\left|2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\theta+2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\theta-\sin(\beta-\alpha)\right| \\
&= \frac{ab}{2}\left|2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right|\left|\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\theta+\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\theta-\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right| \\
&= ab\left|\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right|\left|\cos\left(\theta-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)-\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right|
\end{aligned}
$$

ここで $0<\dfrac{\beta-\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ なので $\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}>0$，$\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}>0$ であることと，
$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\beta+\alpha}{2}<\dfrac{3}{4}\pi$ より $\theta-\dfrac{\beta+\alpha}{2}=\pi$ つまり $\theta=\dfrac{\beta+\alpha}{2}+\pi$ のとき S は最大となる．
このとき

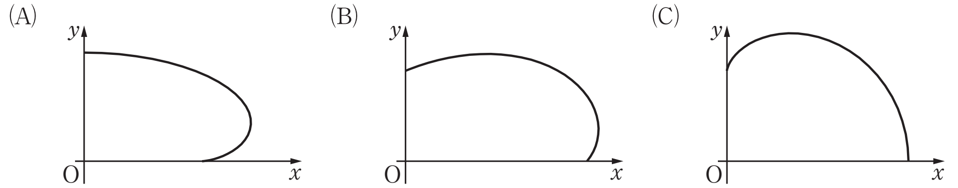
$$a\cos\theta=a\cos\left(\frac{\beta+\alpha}{2}+\pi\right)=-a\cos\frac{\beta+\alpha}{2},$$

$$b\sin\theta=b\sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}+\pi\right)=-b\sin\frac{\beta+\alpha}{2}$$

なので求める点 P の座標は $\left(-a\cos\dfrac{\beta+\alpha}{2},\ -b\sin\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)$．

第６講　媒介変数で表示された曲線

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $(x,\ y)=(3\cos\theta+\cos 3\theta,\ 3\sin\theta+\sin 3\theta)$ で表される曲線を次から選べ.



【答】 C

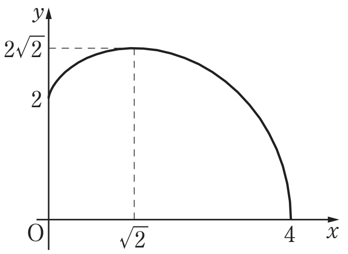
【解説】 $x=3\cos\theta+\cos 3\theta$ より $\dfrac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta-3\sin 3\theta=-12\sin\theta\cos^2\theta$,

$y=3\sin\theta+\sin 3\theta$ より $\dfrac{dy}{d\theta}=3\cos\theta+3\cos 3\theta=12\cos\theta\left(\cos\theta-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となるので

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
x'		$-$	$-$	$-$	
y'		$+$	0	$-$	
$(x,\ y)$	$(4,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$	$\swarrow$	$(0,\ 2)$

を得る.

よってグラフは



となるので，あてはまるグラフはC.

第７講　極限の基本

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[\sqrt{3}\,x]}{[x]}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

【答】 (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\cos 1$　(3) $\sqrt{3}$　(4) $\sqrt{ab}$

【解説】 (1) $\displaystyle\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\frac{\sin^3 x}{x^3\cos x(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\times\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}$ なので

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\times\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2\cos\frac{x+1}{2}\sin\frac{x-1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sin\frac{x-1}{2}}{\frac{x-1}{2}}\cos\frac{x+1}{2}=\cos 1$

(3) $\sqrt{3}\,x-1<[\sqrt{3}\,x]\leqq\sqrt{3}\,x$，$x-1<[x]\leqq x$ であり，$x\to\infty$ を考えたとき $x>1$ としてもよいので，$x-1<[x]\leqq x \iff \dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{[x]}<\dfrac{1}{x-1}$ となることより

$\displaystyle\frac{\sqrt{3}\,x-1}{x}<\frac{[\sqrt{3}\,x]}{[x]}<\frac{\sqrt{3}\,x}{x-1}$ を得る．

　ここで $x\to\infty$ のとき，$\displaystyle\frac{\sqrt{3}\,x-1}{x}=\sqrt{3}-\frac{1}{x}\to\sqrt{3}$，$\displaystyle\frac{\sqrt{3}\,x}{x-1}=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{x}}\to\sqrt{3}$ となるので

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[\sqrt{3}\,x]}{[x]}=\sqrt{3}.$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{1+\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\right\}^{\frac{1}{x}}$ である．

ここで $\dfrac{a^x+b^x}{2}-1=f(x)$ とおくと，$x\to0$ のとき $f(x)\to0$ であり，

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{f(x)}\times\frac{\frac{a^x+b^x}{2}-1}{x}=\frac{1}{f(x)}\times\frac{1}{2}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)$$

となる．$a^x=e^{(\log a)x}$ などより

$$\frac{1}{f(x)}\times\frac{1}{2}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}\times\frac{1}{2}\left(\frac{e^{(\log a)x}-1}{(\log a)x}\log a+\frac{e^{(\log b)x}-1}{(\log b)x}\log b\right)$$

と変形できる．

$g(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{(\log a)x}-1}{(\log a)x}\log a+\dfrac{e^{(\log b)x}-1}{(\log b)x}\log b\right)$ とおくと，

$x\to 0$ のとき，$g(x)\to\dfrac{1}{2}(\log a+\log b)=\log\sqrt{ab}$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}\right\}^{g(x)}=e^{\log\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$

第８講　漸化式と極限

$\alpha=1-\sqrt{3}$，$\beta=1+\sqrt{3}$ に対して $a_n=\alpha^n+\beta^n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定め，β^n 以下の最大整数を k_n で表すことにする．
このとき，k_{2n-1} を 2 で割ったときの余りを求めよ．

【答】 0

【解説】 $\alpha=1-\sqrt{3}$，$\beta=1+\sqrt{3}$ は $x^2-2x-2=0$ の 2 解であるから $\alpha^2-2\alpha-2=0$, $\beta^2-2\beta-2=0$ を満たす．

　このとき

$$\begin{aligned} a_{n+2}-2a_{n+1}-2a_n &= (\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})-2(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-2(\alpha^n+\beta^n) \\ &= \alpha^n(\alpha^2-2\alpha-2)+\beta^n(\beta^2-2\beta-2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

より $a_{n+2}=2a_{n+1}+2a_n$ であり，$a_1=\alpha+\beta=2$,
$a_2=\alpha^2+\beta^2=(2\alpha+2)+(2\beta+2)=2(\alpha+\beta)+4=8$ より a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は正の偶数となる．

　ここで $-1<\alpha<0$ より $-1<\alpha^{2n-1}<0$ であり，
$a_{2n-1}=\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1} \iff \alpha^{2n-1}=a_{2n-1}-\beta^{2n-1}$ より

$$-1<a_{2n-1}-\beta^{2n-1}<0 \quad\iff\quad a_{2n-1}<\beta^{2n-1}<a_{2n-1}+1$$

となるので，$k_{2n-1}=a_{2n-1}$．よって k_{2n-1} を 2 で割ったときの余りは 0.

第9講　ちょっと困った極限

長さが π の線分 AB 上(両端を含む)にいくつかの点を，となりあう点の距離は $\dfrac{1}{n}$ 以上であるようにできるだけ多くの点を並べたい.

このときの並べる点の個数の最大値を a_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ の値を求めよ.

【答】 π

【解説】 並べる点の個数の最大値が a_n なので

$$(a_n-1)\times\frac{1}{n}\leqq\pi<a_n\times\frac{1}{n}\quad\Longleftrightarrow\quad\pi<\frac{a_n}{n}\leqq\pi+\frac{1}{n}$$

が成り立つ.

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\pi+\frac{1}{n}\right)=\pi$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\pi$.

第10講　無限級数

$0<x<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)x^k}{n}$ を求めよ.

【答】 $\dfrac{x}{1-x}$

【解説】 $\displaystyle S=\sum_{k=1}^{n}\frac{kx^k}{n}$ とおくと

$$nS = 1\cdot x+2\cdot x^2+\cdots+n\cdot x^n \quad \cdots①$$

より

$$nS\times x = 1\cdot x^2+2\cdot x^3+\cdots+n\cdot x^{n+1} \quad \cdots②$$

となるので，①と②の差をとることで

$$\begin{aligned}(1-x)nS &= x+x^2+x^3+\cdots+x^n-n\cdot x^{n+1}\\ &= \frac{x(1-x^n)}{1-x}-n\cdot x^{n+1}\\ \therefore\ S &= \frac{x(1-x^n)}{n(1-x)^2}-\frac{x^{n+1}}{1-x}\end{aligned}$$

を得る.

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)x^k}{n}=\sum_{k=1}^{n}x^k-S=\frac{x(1-x^n)}{1-x}-\frac{x(1-x^n)}{n(1-x)^2}+\frac{x^{n+1}}{1-x}$ となるが，$0<x<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)x^k}{n}=\frac{x}{1-x}$$

第11講　微分の基本

(5)は $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ を，それ以外は $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1)　$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(2)　$y=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$

(3)　$x=\tan y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(4)　$(x,\ y)=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ $(t>0)$

(5)　$y=xe^x$

(6)　$x^2+xy+y^2=1$

【答】 (1)　$\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$　　(2)　$x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$　　(3)　$\dfrac{1}{1+x^2}$　　(4)　$-\dfrac{1-t^2}{2t}$

(5)　$(x+n)e^x$　　(6)　$-\dfrac{2x+y}{x+2y}$

【解説】 (1)　$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ より

$$\frac{dy}{dx} = 1\times(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}+x\times\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^2+1)'$$

$$= (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\{(x^2+1)-x^2\}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

(2)　$y=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\log x}{x}}$ より $\dfrac{dy}{dx}=e^{\frac{\log x}{x}}\cdot\left(\dfrac{\log x}{x}\right)'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}\times x-(\log x)\times 1}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$

(3)　$x=\tan y$ の両辺を y で微分すると $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$．よって

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$．

(4)　$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2t\cdot(1+t^2)-(1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}$．

$y=\dfrac{2t}{1+t^2}$ より $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2\cdot(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$ となるので, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\dfrac{1-t^2}{2t}$

(5)　$y=xe^x$ より $\dfrac{dy}{dx}=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(x+1)e^x$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=1\cdot e^x+(x+1)\cdot e^x=(x+2)e^x$ となるので，帰納的に $\dfrac{d^n y}{dx^n}=(x+n)e^x$.

(6)　$x^2+xy+y^2=1$ の両辺を x で微分すると $2x+1\cdot y+x\cdot\dfrac{dy}{dx}+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$ となるので,

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$.

第 12 講　接線など

p を正の定数として，$C : y^2=4px$ 上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \beta)$ における接線を求めよ．

【答】 $\beta y=2p(x+\alpha)$

【解説】 A は C 上の点より $\beta^2=4p\alpha$ …①が成り立つ．

ここで $y^2=4px$ を x で微分すると $2yy'=4p$．これに A の座標を代入して

$2\beta y'=4p$　$\therefore$ $2p-\beta y'=0$

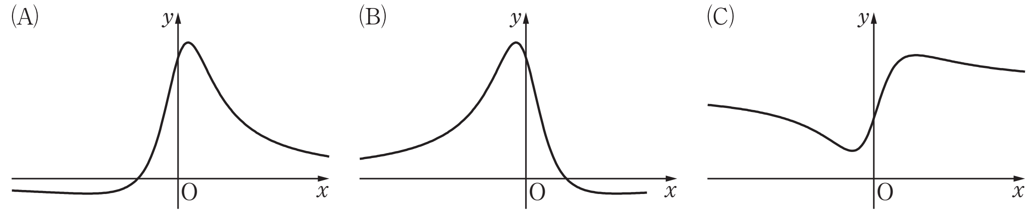
これより $(1,\ y')\cdot(2p,\ -\beta)=0$ となるので，求める接線は

$$2p(x-\alpha)-\beta(y-\beta)=0 \iff \beta y=2px+\beta^2-2p\alpha$$
$$\iff \beta y=2px+2p\alpha \quad (\because ①)$$

よって接線 $\beta y=2p(x+\alpha)$ を得る．

第13講　グラフの描き方（その1）

$f(x)=\dfrac{8+6x}{1+x^2}$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフは以下のどれになるか選べ.



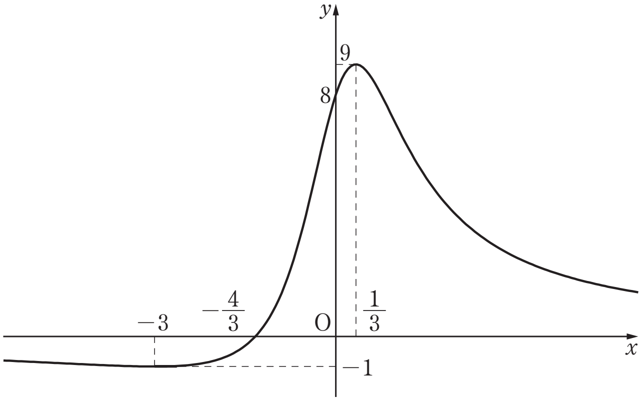
【答】　A

【解説】　$f(x)=\dfrac{8+6x}{1+x^2}$ より $f'(x)=\dfrac{6(1+x^2)-(8+6x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=-\dfrac{2(3x-1)(x+3)}{(1+x^2)^2}$ となるので，$f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	-3	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	9	↘	0

となる.

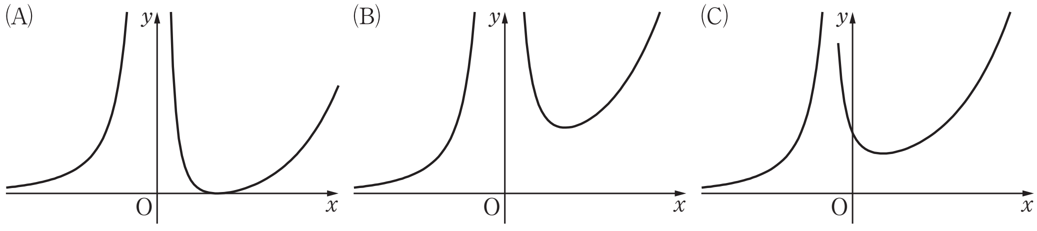
　よって $y=f(x)$ のグラフは



となるので，選ぶべきグラフは A.

第14講　グラフの描き方（その2）

$f(x)=\dfrac{(x^2+1)e^x}{x^2}$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフは以下のどれになるか選べ.



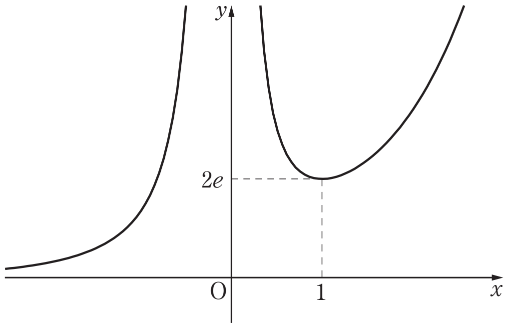
【答】 B

【解説】 $f(x)=\dfrac{(x^2+1)e^x}{x^2}$ より $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x^2+x+2)e^x}{x^3}$ となるので，$f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	$\times$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	∞	↘	$2e$	↗	∞

となる.

よって $y=f(x)$ のグラフは



となるので，選ぶべきグラフは B.

第15講　最大・最小

$f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+2}$ の最小値を求めよ．

【答】 $\sqrt{5}$

【解説】 $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+2}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \\ &= \frac{x\sqrt{x^2-2x+2}+(x-1)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)(x^2-2x+2)}} \end{aligned}$$

となるので，$x\leqq 0$ のとき $f'(x)<0$，$x\geqq 1$ のとき $f'(x)>0$ である．

　$0<x<1$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x\sqrt{x^2-2x+2}+(x-1)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)(x^2-2x+2)}} \\ &= \frac{2x-1}{\left\{x\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)\sqrt{x^2+1}\right\}\sqrt{(x^2+1)(x^2-2x+2)}} \end{aligned}$$

となる．

　以上より $f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↘		↘	$\sqrt{5}$	↗		↗

となるので，求める最小値は $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{5}$．

第16講　実数解に関する問題

x の方程式

$$(\log p)x - \log x = 0 \quad (x > 0)$$

の異なる実数解が2つであるような正の定数 p の範囲を求めよ．
ただし，$\lim_{x \to +0} x^{\frac{1}{x}} = 0$，$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ であることは証明なしに用いてもよい．

【答】 $1 < p < e^{\frac{1}{e}}$

【解説】 $(\log p)x - \log x = 0 \iff \log p = \dfrac{\log x}{x}\left(= \log x^{\frac{1}{x}}\right) \iff p = x^{\frac{1}{x}}$ より

$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ とおくと，$f(x) = e^{\frac{\log x}{x}}$ より

$f'(x) = e^{\frac{\log x}{x}} \times \left(\dfrac{\log x}{x}\right)' = e^{\frac{\log x}{x}} \times \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x) \cdot 1}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x)$ となるので，$f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	×	↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘	1

となり，これと $f(1) = 1$ であることより求める p の範囲は $1 < p < e^{\frac{1}{e}}$．

第17講　不等式について

k を実数とする．1より大きい x に対して $x^4-2x^2-kx^2+k+2 \geqq 0$ が常に成立するような k の最大値を求めよ．

【答】 2

【解説】 $x>1$ なので

$x^4-2x^2-kx^2+k+2 \geqq 0 \iff x^4-2x^2+2 \geqq k(x^2-1) \iff \dfrac{x^4-2x^2+2}{x^2-1} \geqq k$ と変形できる．

このとき $f(x)=\dfrac{x^4-2x^2+2}{x^2-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x^3-4x)(x^2-1)-(x^4-2x^2+2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

より

x	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	↘	2	↗	∞

となるので，$x>1$ で与式が常に成り立つような k は $k \leqq 2$．

よって求める最大値は 2．

第 18 講　積分の基礎

次の不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int (e^x+e^{-x})^3\,dx$

(2) $\displaystyle\int \sin 3x\cos 2x\,dx$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{3-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{2x^3+10x^2+10x-5}{(x+2)(x+3)}\,dx$

【答】 (1) $\dfrac{1}{3}e^{3x}+3e^x-3e^{-x}-\dfrac{1}{3}e^{-3x}+C$　　(2) $-\dfrac{1}{10}\cos 5x-\dfrac{1}{2}\cos x+C$

(3) $-\dfrac{3}{8}(3-x^2)^{\frac{4}{3}}+C$　　(4) $x^2-\log|(x+2)(x+3)|+C$

【解説】 (1) $\displaystyle\int (e^x+e^{-x})^3\,dx=\int (e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x})\,dx$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}+3e^x-3e^{-x}-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$$

(2) $\displaystyle\int \sin 3x\cos 2x\,dx=\int \frac{\sin 5x+\sin x}{2}\,dx=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+C$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{3-x^2}\,dx=\int \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)\sqrt[3]{3-x^2}\,dx=\left(-\frac{1}{2}\right)(3-x^2)^{\frac{4}{3}}\times\frac{3}{4}+C$

$$=-\frac{3}{8}(3-x^2)^{\frac{4}{3}}+C$$

(4) $\displaystyle\int \frac{2x^3+10x^2+10x-5}{(x+2)(x+3)}\,dx=\int \left\{2x-\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}\right\}dx=\int \left(2x-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=x^2-\log|x+2|-\log|x+3|+C=x^2-\log|(x+2)(x+3)|+C$

第19講　部分積分

不定積分を求めよ．ただし積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int e^x\cos 2x\,dx$

(2) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

【答】 (1) $\dfrac{e^x}{5}(2\sin 2x+\cos 2x)+C$　(2) $(x^2-2x+2)e^x+C$

(3) $x\tan x+\log|\cos x|+C$　(4) $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$

【解説】 (1) $\displaystyle\int e^x\cos 2x\,dx=I$ とおくと，

$$\begin{aligned}I &= e^x\cos 2x-\int e^x(-2\sin 2x)\,dx\\ &= e^x\cos 2x-\left\{e^x(-2\sin 2x)-\int e^x(-4\cos 2x)\,dx\right\}\\ &= e^x(2\sin 2x+\cos 2x)-4I\end{aligned}$$

となるので $I=\dfrac{e^x}{5}(2\sin 2x+\cos 2x)+C$

(2) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx=x^2e^x-\left(2xe^x-\int 2e^x\,dx\right)=x^2e^x-(2xe^x-2e^x)+C$

$=(x^2-2x+2)e^x+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx=x\tan x-\int 1\cdot\tan x\,dx=x\tan x+\int\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx=x\tan x+\log|\cos x|+C$

(4) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x-\int 2x\sin x\,dx=x^2\sin x-\left\{2x(-\cos x)-\int 2(-\cos x)\,dx\right\}$

$=(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$

第 20 講　置換積分

定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}(\log x)^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{3+x^2}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

【答】 (1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $3\log 2-2$　(3) $\log\dfrac{e^2+1}{2}$　(4) $4\log\dfrac{3}{2}-1$　(5) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

(6) $\dfrac{9}{4}\pi$

【解説】 (1) $\log x=t$ と置換する．これを x で微分して $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$ より $\dfrac{1}{x}dx=dt$．また，

$(\log x)^2=t^2$，$x=e$ のとき $\log e=t$ より $t=1$，$x=1$ のとき $\log 1=t$ より $t=0$ なので

$$\int_1^e \frac{1}{x}(\log x)^2dx=\int_0^1 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(2) $x+1=t$ と置換する．$x+1=t$ を x で微分して $1=\dfrac{dt}{dx}$ なので $dx=dt$．

また $x=t-1$ であり，$x=1$ のとき $t=2$，$x=0$ のとき $t=1$ なので

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)^2}dx=\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^2}dt=\int_1^2\left(t-3+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2-3t+3\log|t|+\frac{1}{t}\right]_1^2$$
$$=3\log 2-2$$

(3) $e^x=t$ と置換する．$e^x=t$ を x で微分して $e^x=\dfrac{dt}{dx}$ なので $dx=\dfrac{1}{e^x}dt$，つまり

$dx=\dfrac{1}{t}dt$．

よって $\dfrac{2e^x}{e^x+e^{-x}}dx=\dfrac{2t}{t+\dfrac{1}{t}}\dfrac{1}{t}dt=\dfrac{2t}{t^2+1}dt$ となる．また，$x=1$ のとき $t=e$，$x=0$ のときき $t=1$ より

$$\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}dx=\int_1^e \frac{2t}{t^2+1}dt=\Big[\log(t^2+1)\Big]_1^e=\log\frac{e^2+1}{2}$$

(4) $\sqrt{x}=t$ と置換する．$x=t^2$ より，これを t で微分して $\dfrac{dx}{dt}=2t$ なので $dx=2t\,dt$．

また，$x=4$ のとき $t=2$，$x=1$ のとき $t=1$ なので

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx=\int_1^2 \frac{t-1}{t+1}\cdot 2t\,dt=\int_1^2\left(2t-4+\frac{4}{t+1}\right)dt=\Big[t^2-4t+4\log|t+1|\Big]_1^2$$
$$=4\log\frac{3}{2}-1$$

(5)　$\sqrt{3}\tan\theta=x$ と置換する．θ で微分して $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}=\dfrac{dx}{d\theta}$ なので $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$.

また，$x=3$ のとき $\sqrt{3}\tan\theta=3$ より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$x=0$ のとき $\sqrt{3}\tan\theta=0$ より $\theta=0$ なので

$$\int_0^3 \frac{1}{3+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3+3\tan^2\theta}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

(6)　$3\sin\theta=x$ と置換する．θ で微分して $3\cos\theta=\dfrac{dx}{d\theta}$ なので $dx=3\cos\theta\,d\theta$.

また，$x=3$ のとき $3\sin\theta=3$ より $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$x=0$ のとき $3\sin\theta=0$ より $\theta=0$ なので

$$\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2\theta}\cdot 3\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9|\cos\theta|\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\left[\frac{9}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{4}\pi$$

第21講　面積

> $y=a\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=\tan x$ $\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ で囲まれる部分の面積を求めよ.
> ただし，a は1より大きい定数とする.

【答】 $a-\log a-1$

【解説】 $a\sin x=\tan x \iff \dfrac{\sin x(a\cos x-1)}{\cos x}=0$ より $\sin x=0$ または $\cos x=\dfrac{1}{a}$.

$a>1$ より $\cos x=\dfrac{1}{a}$ かつ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 x は1つだけ存在するので，それを t とおくと

$$\cos t=\frac{1}{a}\ \text{かつ}\ 0<t<\frac{\pi}{2}$$

を満たす.

このときの2つの曲線の共有点は $x=0$, t で $0<x<t$ のとき $a\sin x>\tan x$ なので，求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^t(a\sin x-\tan x)\,dx &= \Big[-a\cos x+\log|\cos x|\Big]_0^t\\ &= -a\cos t+\log|\cos t|+a\\ &= -a\cdot\frac{1}{a}+\log\left|\frac{1}{a}\right|+a\\ &= a-\log a-1\end{aligned}$$

第22講　体積

xyz 空間の zx 平面上に C：$z=\sin x$ かつ $0\leqq x\leqq\pi$ かつ $y=0$ を考える．
C 上の点 P を通り $\vec{l}=(1,\ -2,\ -1)$ に平行な直線と xy 平面との交点を Q とする．
P が C 上を動くとき，線分 PQ と zx 平面，xy 平面で囲まれる部分を K とする．立体 K の体積 V を求めよ．

【答】 $\dfrac{\pi}{2}$

【解説】 $\mathrm{P}(t,\ 0,\ \sin t)$ $(0<t<\pi)$ とする．

P から x 軸に下ろした垂線の足を H とすると，$\mathrm{H}(t,\ 0,\ 0)$ であり，$\mathrm{HP}=\sin t$ である．

また，実数 u を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+u\vec{l}=(t+u,\ -2u,\ \sin t-u)$ と表せ，$\sin t-u=0$ より $u=\sin t$ なので $\mathrm{Q}(t+\sin t,\ -2\sin t,\ 0)$ を得る．

よって $\overrightarrow{\mathrm{HQ}}=(\sin t,\ -2\sin t,\ 0)$ より $\mathrm{HQ}=\sqrt{5}\sin t$ なので

△PHQ の面積は

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{HP}\times\mathrm{HQ}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin^2 t$$

となる．

また $\vec{n}=(2,\ 1,\ 0)$ とすると，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{HQ}}$ なので，原点を通り $\vec{n}$ に平行な直線を m として，直線 m と直線 HQ の交点を R とすると，R を通り m に垂直な平面で立体 K を切ったときの切り口の面積が $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sin^2 t$ なので，

$$V=\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}\pi}\frac{\sqrt{5}}{2}\sin^2 t\,d\mathrm{OR}$$

ここで $\mathrm{OR}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}t$ より，$d\mathrm{OR}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}dt$，$\mathrm{OR}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\pi$ のとき $t=\pi$，$\mathrm{OR}=0$ のとき $t=0$ なので

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{5}}{2}\sin^2 t\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\,dt\\&=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt\\&=\left[\frac{2t-\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi}\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

第23講　積分でやっておくこと（その1）

座標平面上を運動する点 $P\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ $(t\geqq 0)$ について，Pの速度ベクトルを $\vec{v}$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{v}$ の値を求めよ．

(2)　$0\leqq t\leqq 1$ の間にPが動いた道のりを求めよ．

【答】　(1)　0　　(2)　$\dfrac{\pi}{2}$

【解説】　(1)　$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$y=\dfrac{2t}{1+t^2}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}\\ &= -\frac{4t}{(1+t^2)^2},\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}\\ &= \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\end{aligned}$$

より $\vec{v}=\dfrac{2}{1+t^2}(-y,\ x)$ となる．

よって $\overrightarrow{OP}\cdot\vec{v}=(x,\ y)\cdot\dfrac{2}{1+t^2}(-y,\ x)=\dfrac{2}{1+t^2}(-xy+xy)=0$

(2)　Pが動いた道のりは

$$\begin{aligned}\int_0^1|\vec{v}|\,dt &= \int_0^1\sqrt{\left(\frac{2}{1+t^2}\right)^2\{(-y)^2+x^2\}}\,dt\\ &= \int_0^1\frac{2}{1+t^2}\,dt\quad(\because\ x^2+y^2=1)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\quad(t=\tan\theta \text{ と置換した})\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}2\,d\theta\\ &= \Big[2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

第24講　積分でやっておくこと（その2）

次の各問いに答えよ．

(1)　$x>0$ のとき，次の不等式を示せ．

$$x-\frac{1}{2}x^2<\log(1+x)<x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$$

(2)　$I=\int_0^1\frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx$ とするとき，次のどの不等式が成り立つか．成り立つものを選べ．

(A)　$0.7<I<0.8$　　(B)　$0.8<I<0.9$　　(C)　$0.9<I<1.0$

【答】 (1)　略　　(2)　B

【解説】 (1)　$f(x)=\log(1+x)-\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)$ とおくと，$x>0$ のとき

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$ であり，$f(0)=0$ より $x>0$ のとき $f(x)>0$．つまり

$\log(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2$

また，$g(x)=\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)-\log(1+x)$ とおくと，

$g'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}$ より $x>0$ で $g'(x)>0$．

更にこれと $g(0)=0$ より，$x>0$ で $g(x)>0$．つまり $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3>\log(1+x)$．

以上より，$x>0$ のとき $x-\frac{1}{2}x^2<\log(1+x)<x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$ が示された．

(2)　$x\neq 0$ のとき $x^2>0$ なので，(1)の結果より，

$$x^2-\frac{1}{2}x^4<\log(1+x^2)<x^2-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^6$$

つまり　$$1-\frac{1}{2}x^2<\frac{\log(1+x^2)}{x^2}<1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^4$$

が成り立つ．よって

$$\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx<\int_0^1\frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx<\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^4\right)dx$$

を得る．ここで

$$\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[x-\frac{1}{6}x^3\right]_0^1=\frac{5}{6}\,(=0.833\cdots)$$

$$\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^4\right)dx=\left[x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{15}x^5\right]_0^1=\frac{9}{10}\,(=0.9)$$

となるので，成り立つ不等式はB．